923. 函數方程式 $f(x+y)+f(x-y)=\dfrac{2f(x)\varphi(y)}{1-k^2f^2(x)f^2(y)}$ $(1\geqq k\geqq 0)$ ニ就イテ

春木　博（神戸高商船）

上記ノ函數方程式ニ於テ $k=0$ ナルトキ即チ

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\varphi(y)$ ナルトキハ、ソノ可測解トシテ

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} f(x)=ax+b \\ \varphi(x)\equiv 1 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} f(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x \\ \varphi(x)=\cos\alpha x \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} f(x)=a\cosh\alpha x+b\sinh\alpha x \\ \varphi(x)=\cosh\alpha x \end{cases}$$

ヲ得ルコトハ、ヨリ知ラレテ车ル。茲ニ a, b, α ハ任意ノ實數デアル。コノ場合ノ形式的一拡張トシテ

$$(\mathrm{F})\quad f(x+y)+f(x-y)=\frac{2f(x)\varphi(y)}{1-k^2f^2(x)f^2(y)}$$

$$(1\geqq k\geqq 0)$$

ノ原点ノ近傍ニ於ケル連續解ヲ求メテ見ヨウ。コヽニ注意スベキコトハ(F)ニ於テ $k=0$ ノトキト $1\geqq k>0$ ノトキトハ模樣ガ少シク違ッテ来ルト云フコトデアル。ソレハ $k=0$ ノトキハ $f(0)$ ハ不定デアルガ $1\geqq k>0$ ノトキハ常數解ヲ除ケバ $f(0)=0$ トナルトイフ点ニアル。

(F)ニ於テ $x=0$, $y=0$ トオケバ $(f(0)=a, \varphi(0)=b)$

$$a=0 \quad 又ハ \quad 1-a^4k^2=b$$

$a=0$ ノトキハ (F) ニ於テ $y=0$ トオクコト ニヨリ $f(x)\neq 0$ ナラバ $b=0$ ヲ得ル。

$1-a^4k^2=b$ ナルトキハ (F) ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$f(x)\{1-a^2k^2f^2(x)\}=b\,f(x)$$

今 $a\neq 0$ ノトキ即チ $f(0)\neq 0$ デ、シカモ $f(x)$ ハ連続ナル故、原点ノ適當ナ近傍デ

$$1-a^2k^2f^2(x)=b$$

ガ成立スル。

$$k\neq 0 \text{ ナル故} \qquad f^2(x)=\frac{1-b}{a^2k^2}-a^2$$

$$f(0)=a \text{ ナル故} \qquad f(x)\equiv a$$

故ニ $f(x)$ ハ常數トナル。故ニ常數解ヲ除ケバ $f(0)=0$, $\varphi(0)=1$ デアル。之ヨリ $f(-x)=-f(x)$, $\varphi(-x)=\varphi(x)$ ナルコトハ容易ニ判ル。

次ニ積分ヲ用ヒルコトニヨリ、(F) ヨリ $f(x)$, $\varphi(x)$ ガ連續ナラバ微分可能ナルコトヲ證明シ得ル。

(F) ヲ x ニ關シテ微分シテ

$$f'(x+y)+f'(x-y)=2\varphi(y)\frac{f'(x)+k^2f^2(x)f'(x)f^2(y)}{\{1-k^2f^2(x)f^2(y)\}^2}$$

$x=0$ トオケバ $f'(y)=f'(-y)$, $f(0)=0$ ナル故

$$\varphi(y)\,f'(0)=f'(y)$$

$f'(0)=\alpha$ トオケバ $f(x)$ ガ恒等的ニ常數トナル以外ハ

$\alpha \neq 0$ ナルコトガ上式ヨリ判ルカラ $\varphi(x)=\dfrac{1}{\alpha}f'(x)$

之ヲ (F) ヘ代入スレバ

$$(1)\quad f(x+y)+f(x-y)=\frac{2f(x)f'(y)}{\alpha\{1-k^2f^2(x)f^2(y)\}}$$

(1) ニ於テ x ト y トヲイレカヘレバ $f(y-x)=-f(x-y)$

ナル故

$$(2)\quad f(x+y)-f(x-y)=\frac{2f(y)f'(x)}{\alpha\{1-k^2f^2(x)f^2(y)\}}$$

(1)＋(2) ヲ作レバ

$$f(x+y)=\frac{f(x)f'(y)+f(y)f'(x)}{\alpha\{1-k^2f^2(x)f^2(y)\}}$$

$f(x)$ ハ何回デモ微分可能ナルコトハ (1) カラ証明シ得ルカラ、上式ヲ y ニ関シテ二度微分シ $y=0$ トオケバ，結局 $(\beta=f'''(0))$

$$\alpha f''(x)=2\alpha^3k^2f^3(x)+\beta f(x)$$

$f'(x)$ ヲ両辺ニカケテ積分スルコトニヨリ結局

$$f'^2(x)=\alpha^2k^2f^4(x)+\frac{\beta}{\alpha}f^2(x)+\alpha^2$$

之レヲ解イテ結局

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases} f(x)=\lambda\, sn[\alpha x;\lambda^2k] \\ \varphi(x)=cn[\alpha x;\lambda^2k]\,dn[\alpha x;\lambda^2k]\end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\quad\begin{cases} f(x)=\lambda\, tn[\alpha x;\sqrt{1-\lambda^4k^2}] \\ \varphi(x)=\dfrac{dn[\alpha x;\sqrt{1-\lambda^4k^2}]}{cn[\alpha x;\sqrt{1-\lambda^4k^2}]}\end{cases}$$

$$
(\mathrm{III})\quad \begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\, tn\,\alpha x\; dn\,\alpha x & (\text{母數 } K \text{ 任意}) \\[2ex] g(x) = \dfrac{dn^2 \alpha x}{cn^2 \alpha x} - k^2 sn^2 \alpha x \end{cases}
$$

α ハ任意ノ實數，λ ハ $|\lambda| \leqq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ ナル實數 K ハ $1 \geqq K \geqq 0$ ナル實數トスル。

——（完）——